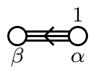
Leibniz Universität
Hannover

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Dr. Pieter Naaijkens

Lie-Algebren und ihre Darstellungen in der Physik
Übung vom 20.05.2014

Übungsstunde 3

Aufgabe 3: Hochstgewicht $\mathfrak{g}_2$
Es sei folgendes Dynkin-Diagramm gegeben:



Finden Sie das Hochstgewicht gehörend zu dieser Darstellung. Verwenden Sie Ihre Ergebnissen in Aufgabe 2 um das Gewicht als Punkt in einem Vektorraum zu beschreiben.

Aufgabe 4: Gewichtsdiagramme von $\mathfrak{su}(3)$-Darstellungen
Die folgende Matrizen sind das Bild der Erzeugern von der Cartan-Unteralgebra in diese Darstellung:

$$T_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \\ & & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

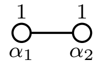
Bemerken Sie dass die Matrizen bereits diagonal sind. Die Matrizen sind das Bild von den zwei Erzeugern der Cartan-Unteralgebra in der Cartan-Weyl Basis. Das heißt, $\alpha = (1, 0)$ ist eine einfache Wurzel, mit $\alpha(T_z) = 1$ und $\alpha(Y) = 0$. Hier schreiben wir α sowohl für das lineare Funktional als auch für den entsprechende Vektor im Wurzelraum. Die zweite Wurzel β ergebt sich durch α über $2\pi/3$ zu drehen, wie man aus dem Dynkin-Diagramm ablesen kann.

a.) Finden Sie die drei Gewichte als lineare Funktionalen auf der Cartan-Unteralgebra und die entsprechende Vektoren von diesen Gewichte im Darstellungsraum.

b.) Ermitteln Sie wie die Gewichte als lineare Kombination von einfache Wurzeln geschrieben können werden. Bestimmen Sie zudem die Ordnung der Vektoren.

c.) Skizzieren Sie die Gewichte und geben Sie das Dynkin-Diagramm von dieser irreduziblen Darstellung.

Jetzt betrachten wir eine andere irreduzible Darstellung von $\mathfrak{su}(3)$, und zwar die mit Hochstgewicht



d.) Ermitteln Sie alle Gewichte.

e.) Das Gewicht 0 hat Multiplizität zwei, die übrige Gewichte sind einfach. Berechnen Sie die Dimension von der Darstellung.

f.) Zeichnen Sie die Gewichten im Wurzelraum.

g.) Welche irreduzible Darstellung haben wir gerade berechnet?